УДК 539.3

ПЕНЬКОВ В. Б., НОВИКОВА О. С., ЛЕВИНА Л. В., НОВИКОВ Е. А.

ПОЛНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОСТАТИКИ

Пеньков Виктор Борисович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей механики,
Липецкий государственный технический университет,
E-mail: vbpenkov@mail.ru.
Новикова Ольга Сергеевна
аспирант кафедры общей механики,
Липецкий государственный технический университет,
E-mail: _o_l_g_a_@bk.ru.
Левина Любовь Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Липецкий государственный технический университет,
E-mail: satalkina_lyubov@mail.ru.
Новиков Евгений Александрович
Инженер, ОАО «НЛМК»
E-mail :novmeh@mail.ru

Аннотация. *Предложена методология построения полнопараметрических решений краевых задач эластостатики – аналитических решений, содержащих все параметры задачи. Методика применена для нахождения напряженно-деформированного состояния изотропного цилиндра в основной смешанной задаче.*

Ключевые слова: *полнопараметрическое решение, аналитическое решение, компьютерная алгебра, метод граничных состояний.*

PENKOV V. B., NOVIKOVA O. S., LEVINA L. V., NOVIKOV E. A.

FULL PARAMETRICAL SOLUTIONS OF THE MIXED PROBLEM OF ELASTOSTATICS

Penkov Viktor Borisovich
doctor of physical and mathematical sciences,
professor of department of general mechanics, Lipetsk state technical university
E-mail: vbpenkov@mail.ru
Novikova Olga Sergeevna
postgraduate student of department of general mechanics,
Lipetsk state technical university,
E-mail: _o_l_g_a_@bk.ru
Levina Lyubov Vladimirovna,
candidate of physic and mathematical sciences,
associate professor of department of applied mathematics,
Lipetsk state technical university
E-mail: satalkina_lyubov@mail.ru
Novikov Evgeniy Aleksandrovich
Engineer, OJSC "NLMK"
E-mail:novmeh@mail.ru

Abstract. *The methodology of construction of the full parametrical solutions of boundary problems of the theory of elasticity – analytical solutions, containing all of the parameters of the problem is proposed. The method is applied for finding stress-strain state of isotropic cylinder in the main mixed problem.*

Keywords*: full parametrical solution, analytical solution, computer algebra, method of boundary states.*

Введение. Прикладные вычислительные процессы обслуживают математические модели объектов (технических, социальных и пр.). В качестве моделей служат как совокупности их определяющих соотношений (системы дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, конечных ...), так и их конечные формы - аналитические выражения характеристик объекта, содержащие все параметры объекта в явном виде. В первом случае при анализе и синтезе приходится решать довольно сложные математические задачи на каждом шагу исследований (как правило - численно), во втором - выполнить рутинные вычисления по готовым формулам.

Разработка методики построения полнопараметрических аналитических решений (ППР) для классов объектов позволит обеспечить сбережение вычислительных ресурсов при их эксплуатации.

1. **Обеспечение полнопараметрического решения**

Для построения ППР корректно поставленной краевой задачи авторами выработана следующая последовательность действий.

- Проведение обезразмеривания. Результатом являются соотношения, содержащие минимальный набор параметров задачи, подлежащих учету в решении. После завершения операций в обезразмеренной постановке обратный переход к размерным величинам обеспечивает ППР.
- Выбор метода, позволяющего представить решение в аналитической форме.
- Обеспечение фигурирования в ППР параметров, заявленных в ГУ. В результирующее решение в явной форме входят обезразмеренные константы, определяющие условия на границе.
- Включение параметров среды в ППР. Процедуры счета зачастую требуют фиксирование значений констант среды. Используя традиционные приемы приближенных вычислений (аппроксимация, возмущение), можно добиться явного вхождения безразмерных параметров среды в ППР.

Основная смешанная задача эластостатики. Задача теории упругости (ТУ) состоит в решении системы уравнений с заданными условиями на границе [1] для линейно-упругого изотропного тела. Систему уравнений определяют соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{1}$$

закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\vartheta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},\ \vartheta = \varepsilon_{kk}, \tag{2}$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \tag{3}$$

где ε_{ij} – деформации, u_i – перемещения, σ_{ij} – напряжения, δ_{ij} – символ Кронекера, λ, μ – параметры Ламе, ϑ – объемная деформация, F_i – объемные силы.

Пусть поверхность тела S состоит из двух частей: $S = S_p \cup S_u$. Будем считать, что в каждой точке x_i поверхности заданы следующие граничные условия:

$$u_i = u_i^*,\ x_i \in S_u, \tag{4}$$

$$p_i = p_i^*,\ x_i \in S_p, \tag{5}$$

где p_i - внешнее усилие на границе.

Обезразмеривание. В соответствии с П – теоремой [2] размерную величину a, которая является функцией независимых между собой размерных величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$, размерности которых не зависимы друг от друга, можно представить в виде

$a = c\, a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}$, где c есть безразмерная постоянная, а показатели $m_1, m_2, \ldots m_n$ легко определяются с помощью формулы размерности для a .

Ниже для краткости изложения до момента восстановления размерных физических величин будем полагать соотношения (1)-(5) представленными в безразмерной форме, причем в качестве масштабных коэффициентов приняты R, μ - соответственно масштабы по геометрии (перемещениям) и поверхностным усилиям (напряжениям).

Метод обеспечения аналитического решения.

Метод граничных состояний (МГС) [3] позволяет записать решение в символьной форме, поскольку он компьютеро-ориентированный, и имеет следующие преимущества [4, 5] перед другими методами (Ритца (вместе со своим мощным дискретным вариантом – методом конечных элементов), Бубнова - Галеркина (включая его конечно-элементную модификацию), Треффтца, Канторовича, Филоненко-Бородича, Канторовича, граничных интегральных уравнений (вместе с его дискретным вариантом – методом граничных элементов)):

1) внутренним состоянием среды в МГС называется частное решение системы уравнений, описывающих состояние среды, заключенной в области, построенное безотносительно к виду ГУ. Совокупность внутренних состояний ξ_i образует гильбертово пространство состояний, которое изоморфно пространству граничных состояний γ_i (изоморфизм гильбертов);

2) в общем случае решением краевой задачи является бесконечная система линейных алгебраических уравнений (БСУ) относительно коэффициентов Фурье c_i разложения искомого состояния по базису пространства состояний. Решение основных задач сводится к рутинному вычислению коэффициентов Фурье через квадратуры. Точность решения можно оценить по невязке граничных условий с полученным решением. Для основных задач доказана разрешимость и единственность решения любой усеченной БСУ;

3) краевые задачи с граничными условиями любого типа легко поддаются формализации в терминах МГС;

4) МГС – самодостаточный метод, хоть и приближенный, что позволяет использовать его как эталонное средство для выверки других численных методов по нахождению НДС;

5) аналитическая форма представления результатов счета позволяет назначить глобальную систему тестов, «пронизывающую» все этапы представления решения.

Отслеживание параметров граничных условий. Разрешающая БСУ имеет вид $Q\mathbf{c} = \mathbf{q}$, где "скелет задачи" Q [3] определяется только поверхностными интегралами по ∂V от сверток пар базисных состояний $\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)}$ и потому не зависит от параметров ГУ. Напротив, вектор правых частей является некоторой интегральной сверткой ГУ, например, $\mathbf{p}^*$, которое представимо линейной комбинацией набора заданных векторных функций $\mathbf{p}^* = \sum_k p_k^* \mathbf{f}_k$, и базисного состояния $\gamma^{(i)}$. Следовательно, справедливо итоговое представление $\mathbf{q} = \sum_k p_k^* \mathbf{q}_k$. Тогда решение БСУ представимо в форме $\mathbf{c} = \sum_k p_k^* Q^{-1} \mathbf{q}_k$, откуда выходит, что безразмерные параметры ГУ в явном виде входят в результат. Действительно, можно последовательно решить задачи $Q\mathbf{c}_k = \mathbf{q}_k$ и формально составить комбинацию $\mathbf{c} = \sum_k p_k^* \mathbf{c}_k$.

Отслеживание параметров среды. Несмотря на то, что современные вычислительные средства, реализующие компьютерные алгебры, выдают решение в символьной форме, после традиционной процедуры обезразмеривания и фиксирования внутреннего состояния они представляются в виде функций от x, y, z , но не содержат ν в явном виде. После перехода к размерному представлению решение не является полнопараметрическим.

При реализации МГС для каждого значения ν_k в условиях краевой задачи строится внутреннее состояние

$$\xi(\nu_k) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(\nu_k)\, \xi^{(m)}(\nu_k),$$

где $\xi^{(m)}(\nu_k)$ есть элемент ортонормированного базиса соответствующего пространства внутренних состояний, построенного при условии $\nu = \nu_k$. Интерполирование по Лагранжу дает

$$\xi(\nu) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j \neq k} (\nu - \nu_j)}{\prod_{j \neq k} (\nu_k - \nu_j)} \sum_{m} c_m(\nu_k)\, \xi^{(m)}(\nu_k) \qquad (6)$$

2. Задача о жестком смещении оснований цилиндра

Упругий цилиндр (константы упругости $\tilde{\mu}$, ν) радиуса R и высоты $h = 2R$ растягивается в вертикальном направлении, при этом давление на боковую поверхность отсутствует: $p^*\big|_{S_1} = \tilde{p}_0^*\{0, 0, 0\}, u^*\big|_{S_2} = \tilde{u}_0^*\{0, 0, 1\}, u^*\big|_{S_3} = \tilde{u}_0^*\{0, 0, -1\}$ (рис. 1).

Объемные силы отсутствуют. Требуется построить ППР задачи о НДС шара.

Обезразмеривание проводим при следующих масштабных коэффициентах: $R_0 = R$, $\sigma_0 = \tilde{\mu}$. В результате имеем задачу ТУ для цилиндра единичного радиуса при единичном значении модуля сдвига, боковой нагрузке и вертикальном перемещении, определяемым коэффициентами $p_0^* = \dfrac{\tilde{p}_0^*}{\tilde{\mu}}$ и $u_0^* = \dfrac{\tilde{u}_0^*}{R}$.

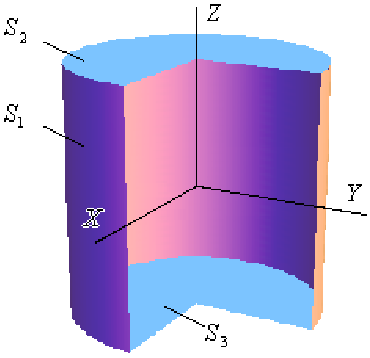

Рис. 1. Граница области

Решение задачи находим при конкретном значении ν.

Для включения параметра из граничных условий u_0^* в ППР домножаем на него все полученные характеристики состояния тела.

Для включения параметра среды в ППР находим c_i при различных значениях $\nu \in \{0; 0{,}125; 0{,}25; 0{,}375; 0{,}45\}$. Полученные ненулевые значения коэффициентов Фурье с точностью до 3 знаков отражены на рис. 2. Соответствующие им внутренние $\xi(\nu_k)$ и граничные $\gamma(\nu_k)$ состояния в статье не приведены. Использование (6) позволило выписать результирующее состояние, содержащее в явном виде коэффициент Пуассона ν.

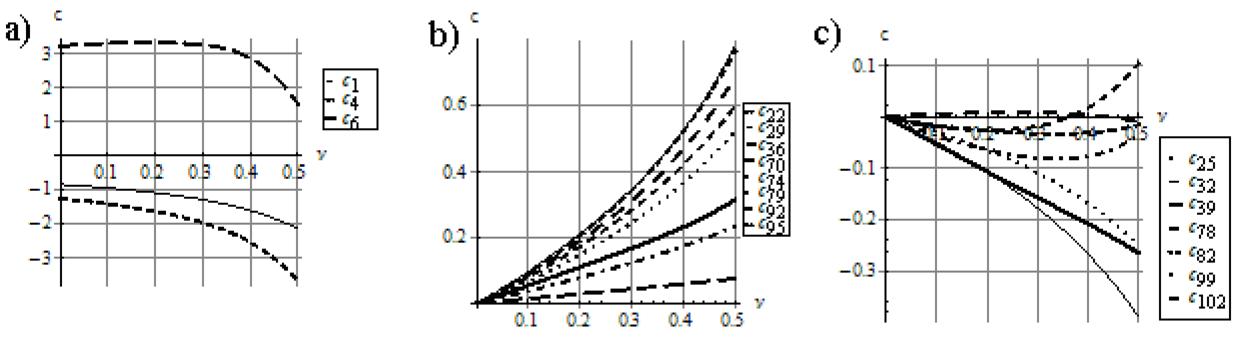

Рис. 2. Коэффициенты Фурье в зависимости от коэффициента Пуассона:

a) c_1, c_4., c_6; b) c_{22}, c_{29}, c_{36}; c_{36}, c_{70}, c_{74}, c_{79}, c_{92}., c_{95}; c) c_{25}, c_{32}, c_{39}; c_{78}, c_{82}, c_{99}, c_{102}.

О достоверности решения говорит среднеквадратическая невязка, которая при подстановке полученного решения в уравнение равновесия составляет $8 \cdot 10^{-15}$, в соотношениях Коши – $5 \cdot 10^{-16}$, что вызвано погрешностью представления числа.

После возвращения к размерному представлению решение задачи включает все параметры, т.е. является полнопараметрическим. Ниже записаны получившиеся перемещения вдоль осей $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ ("тильда" над координатами не указана для удобства).

$$
\begin{aligned}
u_x = \tilde{u}_0^* x / R\{ & (-0{,}982 - 0{,}095x^2/R^2 + 0{,}054x^4/R^4 - 0{,}093y^2/R^2 + 0{,}105x^2y^2/R^4 + 0{,}046y^4/R^4 + \\
& + 1{,}140z^2/R^2 - 0{,}417x^2z^2/R^4 - 0{,}410y^2z^2/R^4 + 0{,}136z^4/R^4)\nu + \\
& + (-0{,}989 + 0{,}699x^2/R^2 - 0{,}047x^4/R^4 + 0{,}679y^2/R^2 - 0{,}056x^2y^2/R^4 + 0{,}072y^4/R^4 - \\
& - 0{,}395z^2/R^2 - 0{,}887x^2z^2/R^4 - 0{,}991y^2z^2/R^4 + 1{,}440z^4/R^4)\nu^2 + \\
& + (2{,}920 - 1{,}650x^2/R^2 + 0{,}292x^4/R^4 - 1{,}570y^2/R^2 + 0{,}420x^2y^2/R^4 - 0{,}218y^4/R^4 + \\
& + 0{,}177z^2/R^2 + 0{,}525x^2z^2/R^4 + 0{,}977y^2z^2/R^4 - 2{,}510z^4/R^4)\nu^3 + \\
& + (-5{,}950 + 3{,}480x^2/R^2 - 0{,}551x^4/R^4 + 3{,}390y^2/R^2 - 0{,}886x^2y^2/R^4 + 0{,}117y^4/R^4 - \\
& - 0{,}641z^2/R^2 - 0{,}943x^2z^2/R^4 - 1{,}540y^2z^2/R^4 + 4{,}980z^4/R^4)\nu^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_y = \tilde{u}_0^* y / R\{ & (-0{,}985 - 0{,}083x^2/R^2 + 0{,}047x^4/R^4 - 0{,}096y^2/R^2 + 0{,}108x^2y^2/R^4 + 0{,}056y^4/R^4 + \\
& + 1{,}150z^2/R^4 - 0{,}430x^2z^2/R^4 - 0{,}421y^2z^2/R^4 + 0{,}132z^4/R^4)\nu + \\
& + (-0{,}944 + 0{,}523x^2/R^2 - 0{,}048x^4/R^4 + 0{,}723y^2/R^2 - 0{,}108x^2y^2/R^4 + 0{,}074y^4/R^4 - \\
& - 0{,}535z^2/R^2 - 0{,}697x^2z^2/R^4 - 0{,}835y^2z^2/R^4 + 1{,}500z^4/R^4)\nu^2 + \\
& + (2{,}720 - 0{,}891x^2/R^2 - 0{,}117x^4/R^4 - 1{,}760y^2/R^2 + 0{,}646x^2y^2/R^4 + 0{,}414y^4/R^4 + \\
& + 0{,}788z^2/R^2 - 0{,}304x^2z^2/R^4 + 0{,}296y^2z^2/R^4 - 2{,}790z^4/R^4)\nu^3 + \\
& + (-5{,}680 + 2{,}480x^2/R^2 - 0{,}017x^4/R^4 + 3{,}630y^2/R^2 - 1{,}190x^2y^2/R^4 - 0{,}714y^4/R^4 - \\
& - 1{,}460z^2/R^2 + 0{,}159x^2z^2/R^4 - 0{,}635y^2z^2/R^4 + 5{,}350z^4/R^4)\nu^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_z = \tilde{u}_0^* z / R\{ & (0{,}226 - 0{,}533x^2/R^2 - 0{,}388x^4/R^4 - 0{,}519y^2/R^2 - 0{,}777x^2y^2/R^4 - 0{,}397y^4/R^4 - \\
& - 0{,}161z^2/R^4 + 0{,}753x^2z^2/R^4 + 0{,}752y^2z^2/R^4 - 1{,}450z^4/R^4)\nu + \\
& + (1{,}500 - 1{,}130x^2/R^2 + 0{,}459x^4/R^4 - 1{,}330y^2/R^2 + 0{,}949x^2y^2/R^4 + 0{,}590y^4/R^4 - \\
& - 0{,}692z^2/R^2 + 0{,}418x^2z^2/R^4 + 0{,}435y^2z^2/R^4 + 19{,}500z^4/R^4)\nu^2 + \\
& + (-4{,}080 + 3{,}510x^2/R^2 - 0{,}945x^4/R^4 + 4{,}420y^2/R^2 - 2{,}020x^2y^2/R^4 - 1{,}520y^4/R^4 + \\
& + 1{,}270z^2/R^2 - 1{,}610x^2z^2/R^4 - 1{,}680y^2z^2/R^4 - 85{,}900z^4/R^4)\nu^3 + \\
& + (8{,}300 - 7{,}160x^2/R^2 + 1{,}500x^4/R^4 - 8{,}360y^2/R^2 + 3{,}180x^2y^2/R^4 + 2{,}260y^4/R^4 - \\
& - 3{,}190z^2/R^2 + 4{,}450x^2z^2/R^4 + 4{,}550y^2z^2/R^4 + 113{,}000z^4/R^4)\nu^4
\end{aligned}
$$

Выводы

1. Продемонстрирована эффективная методика построения ППР для линейно упругого тела с фиксированными геометрическими пропорциями.

2. МГС адаптирован для компьютерной реализации.

3. Применение многочленов Лагранжа для построения ППР энергозатратно.

4. Построенное ППР позволяет включать его же в базис пространства внутренних состояний для тел, содержащих изученный объект как фрагмент, что значительно снижает затраты на ортогонализацию исходного базиса.

Библиографический список

1. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст]/ Ю.Н. Работнов – М.: «Наука», 1988. – 712 с.

2. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике [Текст]/ Л.И. Седов – М.: «Наука», 1972. – 440 с.

3. Пеньков, В.В. Метод граничных состояний в задачах линейной механики [Текст] : дисс. … канд. физ.- мат. наук : 01.02.04 / Пеньков В. В. – Тула, 2002. – 100 с.

4. Пеньков, В.Б. Анализ влияния положения сферической полости на напряженно-деформированное состояние упругого слоя [Текст] / В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, С.В. Ткаченко, К.Ю. Куликова // «Потенциал современной науки». Научно-производственный периодический журнал. №2 (10), Март 2015. С. 7-12.

5. Пеньков, В.Б. A new method for analyzing the effect of body forces induced by nanodispersed magnetic fluids on states of elastic solids [Текст] / В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, М. Ю. Левин, Н.В. Кузьменко / Наука в центральной России. Научно-производственный периодический журнал. №2 (20), 2016. С. 12-16.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-41-480729.

References

1. Rabotnov, Ju.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela [Tekst]/ Ju.N. Rabotnov – M.: «Nauka», 1988. – 712 s.

2. Sedov, L.I. Metody podobija i razmernosti v mehanike [Tekst]/ L.I. Sedov – M.: «Nauka», 1972. – 440 s.

3. Pen'kov, V.V. Metod granichnyh sostojanij v zadachah linejnoj mehaniki [Tekst] : diss. … kand. fiz.- mat. nauk : 01.02.04 / Pen'kov V. V. – Tula, 2002. – 100 s.

4. Pen'kov V.B, Tkachenko S.V., Kulikova K.Ju. Analiz vlijanija polozhenija sfericheskoj polosti na naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie uprugogo sloja //«Potencial sovremennoj nauki». Nauchno-proizvodstvennyj periodicheskij zhurnal. №2 (10), Mart 2015. S. 7-12.

5. Pen'kov, V.B. A new method for analyzing the effect of body forces induced by nanodispersed magnetic fluids on states of elastic solids [Text] / V.B. Pen'kov, L.V. Levina, M. Ju. Levin, N.V. Kuz'menko / Nauka v central'noj Rossii. Nauchno-proizvodstvennyj periodicheskij zhurnal. №2 (20), 2016. S. 12-16.