

СЕТТИЕВ Ш.Р., РАЖАБОВ Ж.Ш.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ГАЛЕРКИНА

Сеттиев Шамсуддин Ражабович,

и.о. доцент кафедры, кандидат физико-математических наук.
 Филиал ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет
 им. Г.В.Плеханова» в г. Ташкенте.

100003. г. Ташкент, Узбекистанский проспект 49, корпус 7.

E- mail: shamsis@rambler.ru

Ражабов Жалолiddин Шамсуддин угли,

студент ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет».

355009, Ставропольский край, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1.

E- mail: Jaloliddin.rajabov@mail.ru

***Аннотация.** В данной работе рассматриваются способы применения спектральных методов к решениям классических задач механики. Излагается алгоритм решение уравнений Бюргерса с применением метода Галеркина. Результаты численных расчетов сопоставляются с точными решениями уравнений Бюргерса при различных значениях чисел Рейнольдса Re .*

***Ключевые слова:** спектральный метод, метод Галеркина, уравнение Навье-Стокса, многочлены Чебышева, численное решение, быстрое преобразование Фурье.*

SETTIEV SH.R., RAJABOV J.SH.

SOME APPLICATIONS OF GALERKIN'S SPECTRAL METHODS

Settiev Sh.R.,

acting associate Professor,

candidate of physical and mathematical Sciences.

Branch FGBOU VPO "Russian economic University named after.

G. V. Plekhanov" in Tashkent.

100003. Tashkent, Uzbekistan Avenue, 49, building 7.

E-mail: shamsis@rambler.ru

Rajabov J.Sh.

student fsaei HPE "North-Caucasian Federal University".

355009, Stavropol territory, Stavropol, Pushkin street, 1.

E-mail: Jaloliddin.rajabov@mail.ru

***Abstract.** In this work there considered methods of application of spectral methods to the solution of classical tasks of mechanics. There recited algorithm of solution of Byurgers' equations with application of Galerkin method. The results of numerical calculations are compared with exact solution of Byurgers' equations at various values of numbers of Reynolds Re .*

***Keywords:** spectral method, Galerkin method, equation of Navye-Stoks, multinomial of Chebyshev, numerical solution, fast transformation of Furrye.*

В данной работе приведем некоторые алгоритмы решения и численные реализации применения спектральных методов Галеркина к некоторым задачам, которые описываются уравнениями типа Навье-Стокса.

Уравнения Бюргерса. Рассмотрим одномерный вариант уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(1)

Это уравнение представляет собой одну из моделей уравнений Навье-Стокса и показывает баланс между нелинейным конвективным членом и диссипативным процессом. Будем рассматривать задачи о распространение волны. Волна представляет собой разрыв, расположенный в плоскости. В дальнейшем эта волна распространяется вправо, однако, будучи сначала разрывной, сглаживается за счет воздействия диссипативного вязкого процесса.

Будем искать решение уравнения Бюргера при области $-1 \leq x \leq 1$.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u_0 = u(x, 0) &= 1 \text{ при } -1 \leq x \leq 0, \\ u_0 = u(x, 0) &= 0 \text{ при } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия:

$$u(-1, t) = 1, u(1, t) = 0. \quad (3)$$

Для численного решения задачи (1)-(3) применим спектральный метод Галеркина. Пробное решение представим в таком виде:

$$u_a(x, t) = \sum_{j=0}^N a_j(t) T_j(x) \quad (4)$$

где $T_j(x)$ - многочлены Чебышева, a_j - искомые коэффициенты разложения. Подставив (4) в (1), получим невязку R

$$R = \sum_j \dot{a}_j T_j + \sum_j a_j \sum_i a_i T_j \frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{1}{Re} \sum_j a_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} \quad (5)$$

Система уравнений относительно коэффициентов разложения a_j получается из условия (внутреннее произведение равно нулю)

$$(R, T_k) = 0, k = 0, 1, \dots, N - 2 \quad (6)$$

т.е.

$$\int_{-1}^1 R \cdot T_k(x) dx = 0.$$

Два коэффициента, входящие в пробное решение, выражаются через другие алгебраические коэффициенты за счет требования об удовлетворении граничных условий. Выполнение условия (6) дает:

$$M\dot{A} + (B + C)A = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= a_j, \\ M &= m_{kj} = (T_j, T_k), \\ B &= b_{kj} = \sum_i \left(T_j \frac{\partial T_i}{\partial x}, T_k \right), \\ C &= c_{kj} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial T_j}{\partial x}, \frac{\partial T_k}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

К уравнению (6) применялась теорема Грина. Начальные значения a_j определяются путем применения метода Галеркина к начальным данным

$$(u_a - u_0, T_k) = 0, k = 0, 1, \dots, N - 2.$$

Получим

$$MA = D, D = (u_0, T_k) = \int_{-1}^0 T_k dx \quad (8)$$

Мы сформулировали общий подход применения спектрального метода Галеркина. Надо особо отметить, что если пробные функции составлены из ортогональных базисных функций, решение поставленной задачи значительно упрощается. Известно, что многочлены Чебышева ортогональные в отрезке $[-1, 1]$, с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, мы берем $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_k$ вместо T_k , где

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1}$$

Далее опишем алгоритм решения уравнения Бюргерса, применяя псевдоспектральный подход метода Галеркина.

Предположим, что на n -м слое времени нам известно решение u_a^n .

1) Вычислим коэффициенты a_j^n , применяя быстрое преобразование Фурье к

$$u_a^n(x_l) = \sum_j a_j^n T_j(x_l), l = 1, 2, \dots, 2N.$$

2) Вычислим b_j^n по a_j^n из рекуррентных соотношений (для $\frac{\partial u}{\partial x}$).

3) Вычислим

$$\frac{\partial u_a^n(x_l)}{\partial x} = \sum_j b_j^n T_j(x_l), l = 1, 2, \dots, 2N.$$

4) Вычислим

$$h_a^n(x_l) = u_a^n(x_l) \frac{\partial u_a^n(x_l)}{\partial x}, l = 1, 2, \dots, 2N.$$

5) Вычислим

$$q_k^n = \int_{-1}^1 h_a^n T_k dx.$$

6) Вычислим

$$p_k^n = \sum_j \left(T_k, \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} \right) a_j^n$$

из рекуррентных соотношений (для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$).

7) Вычислим

$$\frac{\partial u_k^{n+1}}{\partial t} = -q_k^n + \frac{p_k^n}{Re}.$$

8) Вычислим

$$a_k^{n+1} = a_k^n + f \left(\frac{\partial a_k^{n+1}}{\partial t} \right).$$

Производные по времени аппроксимируем по следующим разностным схемам (9) и (10) [2], чтобы можно было сравнивать между собой:

$$\begin{aligned} U^{\overline{n+1}} &= U^n + \Delta t F^n \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t F^{\overline{n+1}} \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} U^n &= U^n + \Delta t F^n \\ U^{n+1} &= \chi U^n + (1 - \chi) \Delta t U^{n+1} \end{aligned} \quad (10)$$

При $\chi = \frac{1}{2}$ схема устойчива. В нашем случае известно решение в нулевом слое времени, т.е. выполнение начального условия. Далее выполняются требования всех пунктов. Для последнего пункта используется двухшаговая схема (9). Во избежание побочных погрешностей для вычисления $u_a^n(x_l)$ использовались $2N$ точек. Интегрирование проводилось по формуле Симпсона высокого порядка точности [1]. В пробном решении мы брали 10 членов разложения (4). Запишем рекуррентные соотношения, которые используются в пунктах 2 и 6:

$$\begin{aligned} b_k &= b_{k+2} + 2ka_{k+1}, 2 \leq k \leq N \\ b_1 &= 0.5b_3 + a_2, b_{N+1} = b_{N+2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s_k &= s_{k+2} + 2kb_{k+1}, 2 \leq k \leq N - 1 \\ s_1 &= 0.5b_3 + b_2, b_N = b_{N+1} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Приведем полученные результаты в табличной форме, чтобы легко было их сопоставлять с точными решениями [3].

Сравнение приближенного и точного решения при $t = 0,23$, $Re = 1,0$

x	Приближенное решение	Точное решение
-1.00000	1.00000	0.9593
-0.89999	0.97498	0.9447
-0.79999	0.94698	0.9253
-0.69999	0.91565	0.9008
-0.59999	0.88062	0.8709
-0.49999	0.84155	0.8350
-0.39999	0.79824	0.7931
-0.29999	0.75063	0.7452
-0.19999	0.69887	0.6919
-0.99999	0.64337	0.6340
0.00000	0.58476	0.5728
0.10000	0.52388	0.5097
0.20000	0.46169	0.4464
0.30000	0.39918	0.3844
0.40000	0.33729	0.3254
0.50000	0.27675	0.2706
0.60000	0.21806	0.2210
0.70000	0.16137	0.1772
0.80000	0.10650	0.1395
0.90000	0.52955	0.1077
1.00000	0.00000	0.0817

Не очень хорошая сходимость в окрестностях граничных точек объясняется тем, что при численном расчете на каждом шаге по времени контролировалось выполнение граничных условий, и трудностями в нулевом слое времени при одновременном удовлетворении начальных и граничных условий. Численные расчеты проводились при различных значениях числа Рейнольдса $Re = 1.0, 10.0, 100.0$. В восьмом пункте

применялись разностные схемы (9) и (10). Надо отметить, что схема (9) дает хорошее приближение, но требует в два раза больше машинного времени, чем схема (10). Остальные результаты приведем в виде графических зависимостей u от x при различных значениях Re, t .

Рис. 1

Рис. 2

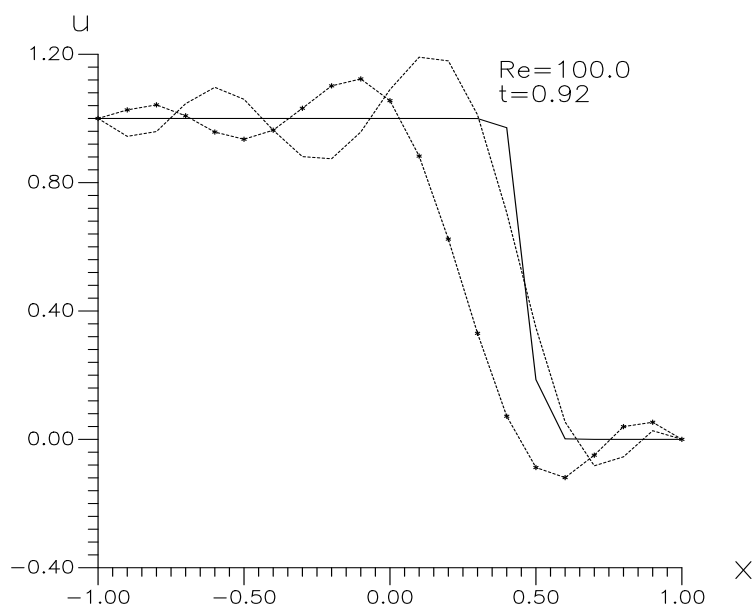


Рис. 3

— точное решение уравнения Бюргерса
 ••••• приближенное решение по схеме (9)
 ...*.....*... приближенное решение по схеме (10)

Список литературы

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. –Москва: Изд-во Лань, 2006. 672с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. -612с.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. -М.: Мир, 1988. -352с.
4. Settiev Sh.R. Volnoobrazovaniya nad peschanim dnom.
<https://www.morebooks.de/store/gb/book/Волнообразование-над-песчаным-дном/isbn/978-3-8443-5920-6>

References

1. Demidovich B. P., Maron I. A. Foundations of computational mathematics. –Moscow.: Publishing house LAN, 2006. S.
2. Roache P. Computational fluid dynamics. - M.: Mir, 1980. -612с.
3. Fletcher K., Numerical methods based on Galerkin method. -M.: Mir, 1988. -352 C.

4. Setiev Sh.R. Volnoobrazvaniya nad peschanim dnom.
<https://www.morebooks.de/store/gb/book/Волнообразование-над-песчаным-дном/isbn/978-3-8443-5920-6>